TITLE:

Resolvable Multipartite P$_3$ Designs(Graph Theory and Its Applications)

AUTHOR(S):

潮, 和彦

CITATION:

潮, 和彦. Resolvable Multipartite P$_3$ Designs(Graph Theory and Its Applications). 数理解析研究所講究録 1985, 566: 76-88

ISSUE DATE:

1985-07

URL:

http://hdl.handle.net/2433/99117

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ KURENAI 紅 Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
566巻 1985年 76-88

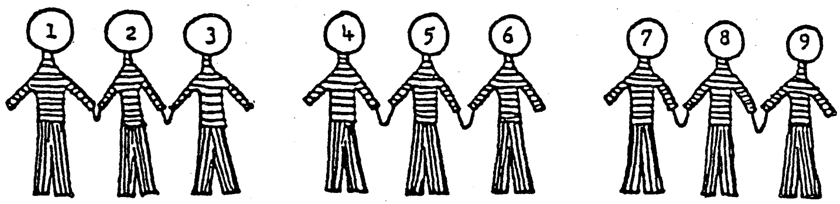
Resolvable Multipartite P_3 Designs

近畿大学 潮 和彦 (Kazuhiko Ushio)

1. はじめに

Resolvable BIB Designの中で, $k=3$, $\lambda=1$ の Resolvable Steiner Triple System は別名Kirkman Design の名前で有名である。" The Problem of 15 School-Girls" , " The Problem of 9 School-Boys"は Kirkman Designの代表例である。これに対して, " The Problem of 9 Prisoners " は Resolvable P_3 Design の代表例である。

" The Problem of 9 Prisoners" : In a jail there were 9 prisoners of a particularly dangerous character. Each morning they were allowed to walk handcuffed in the prison yard. Here is how they walked on Monday:



Could you arrange them for Tuesday - Saturday so that no pair of prisoners is handcuffed together twice ? [1,p229-230]

Answer :	Monday	1-2-3	4-5-6	7-8-9
	Tuesday	3-7-5	6-1-8	9-4-2
	Wednesday	5-9-1	8-3-4	2-6-7

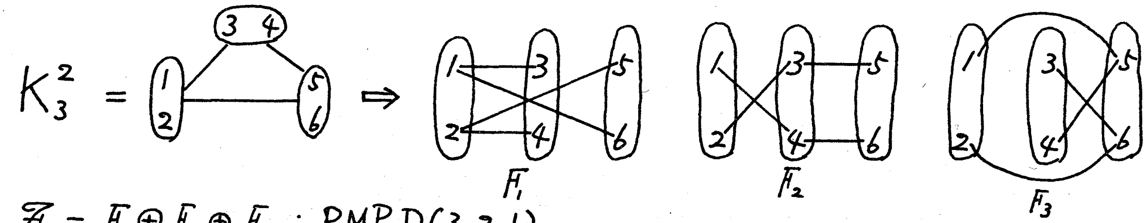
Thursday	⑦-②-⑤	③-①-④	⑨-⑥-⑧
Friday	⑨-⑦-①	⑤-③-⑥	②-⑧-④
Saturday	②-⑨-③	①-⑤-⑧	⑦-④-⑥

Resolvable P_3 Design は Kirkman Design を用いて比較的簡単に構成することができる。Resolvable Multipartite P_3 Design は Resolvable P_3 Design を拡張したものである。

2. Resolvable Multipartite P_3 Designs (RMP_3D)

Definition P_3を3点を結ぶパスとする。成分がすべてP_3であるような全域部分グラフをP_3因子とよぶ。完全多組グラフ $\lambda K_m^n = \lambda K_m(n, n, \cdots, n)$を，互いに辺を共有しないように，$P_3$因子の和に分解する$P_3$因子分解を Resolvable Multipartite P_3 Design とよび，$RMP_3D(m, n, \lambda)$ と書く。特に，$n=1$の場合には，単に Resolvable P_3 Design とよび，$RP_3D(m, \lambda)$と書く。($m \geqq 2$，$n \geqq 1$，$\lambda \geqq 1$ とする。)

Example 1 $RMP_3D(3, 2, 1)$



$\mathcal{F} = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$: $RMP_3D(3,2,1)$

Example 2 $RP_3D(9, 1)$

F_1 = ①—②—③ ∪ ④—⑤—⑥ ∪ ⑦—⑧—⑨

F_2 = ⑦—②—⑤ ∪ ③—①—④ ∪ ⑨—⑥—⑧

$\alpha = (2\ 7\ 9)(5\ 1\ 3)(8\ 4\ 6)$ とおく。

$$\mathcal{F} = F_1 \oplus F_1\alpha \oplus F_1\alpha^2 \oplus F_2 \oplus F_2\alpha \oplus F_2\alpha^2 \ : \ RP_3D(9, 1)$$

これは"The Problem of 9 Prisoners"の1つの解答である。

2.1 RMP$_3$Dの必要条件

λK_m^nのP$_3$因子分解において，P$_3$因子の数をr，1つのP$_3$因子のもつP$_3$成分の数をt，P$_3$因子分解で得られるP$_3$成分の総数をbとすれば

$$t = mn/3, \quad b = rt = \lambda\binom{m}{2}n^2/2$$

が成り立つ。これからRMP$_3$D(m, n, λ)が存在するための明らかな必要条件

$$(i)\ mn \equiv 0 \pmod 3, \quad (ii)\ \lambda(m-1)n \equiv 0 \pmod 4$$

が得られる。

<u>Theorem 1</u> RMP$_3$D(m, n, λ)が存在する

$$\Longrightarrow (i)\ mn \equiv 0 \pmod 3, \quad (ii)\ \lambda(m-1)n \equiv 0 \pmod 4.$$

必要条件(i)(ii)をみたすm, n, λを分類する。

<u>Lemma 1</u> $mn \equiv 0 \pmod 3$, $\lambda(m-1)n \equiv 0 \pmod 4$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (\mathrm{I})\ mn \equiv 0 \pmod 3,\ (m-1)n \equiv 0 \pmod 4,\ \lambda:\text{任意} \\ (\mathrm{II})\ mn \equiv 0 \pmod 3,\ (m-1)n \equiv 2 \pmod 4,\ \lambda \equiv 0 \pmod 2 \\ (\mathrm{III})\ mn \equiv 0 \pmod 3,\ (m-1)n \equiv 1, 3 \pmod 4,\ \lambda \equiv 0 \pmod 4. \end{cases}$$

2.2 Kirkman Design とRMP$_3$D

Kirkman Designを用いてたくさんのRMP$_3$Dを得ることができる。Kirkman Designの存在と構成に関してはRay-Chaudhuri and

Wilson[3] を参照せよ。

<u>Theorem 2</u> [3] RBIBD$(v,3,1)$ が存在する

$$\Longleftrightarrow v \equiv 3 \pmod{6} .$$

<u>Example 3</u> RBIBD$(9,3,1)$

A solution of RBIBD(9,3,1) is

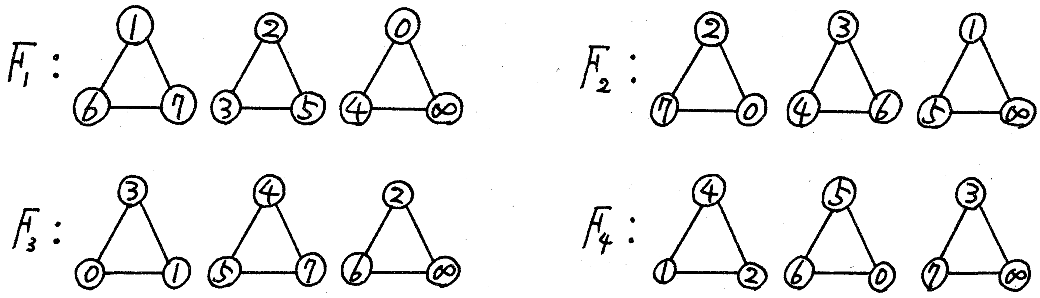
PC(4) [(1,6,7),(2,3,5),(0,4,∞)] mod 8

where PC means a partial cycle.

これは "The Problem of 9 School-Boys" の1つの解答である。

<u>Lemma 2</u> RMP$_3$D$(9,1,1)$ が存在する。

（証明） Example 3 より，RBIBD$(9,3,1)$ の4個の K_3因子 F_i が得られる。



F_1 と F_2 の Common Transversal を T_1 とする：

F_1 : $\{1, 6, 7\}$ $\{2, 3, 5\}$ $\{0, 4, \infty\}$

F_2 : $\{2, 7, 0\}$ $\{3, 4, 6\}$ $\{1, 5, \infty\}$ $\Longrightarrow T_1 = \{7, 3, \infty\}$

$F_1' = F_1 - T_1$ と $F_2' = F_2 - T_1$ の Common Transversal を T_2 とする：

F_1' : $\{1, 6\}$ $\{2, 5\}$ $\{0, 4\}$

F_2' : $\{2, 0\}$ $\{4, 6\}$ $\{1, 5\}$ $\Longrightarrow T_2 = \{6, 5, 0\}$

$F_1'' = F_1' - T_2$ と $F_2'' = F_2' - T_2$ の Common Transversal を T_3 とする：

F_1'' : { 1 } { 2 } { 4 }
F_2'' : { 2 } { 4 } { 7 } $\Longrightarrow T_3 = \{1, 2, 4\}$

F_1, F_2 と T_1, T_2, T_3 から, RMP$_3$D(9,1,1) の3つの P_3 因子 $\widetilde{F}_1, \widetilde{F}_2, \widetilde{F}_{1,2}$ が得られる。

$\widetilde{F}_1$: ①—⑦—⑥　②—③—⑤　⓪—∞—④
$\widetilde{F}_2$: ②—⓪—⑦　③—⑥—④　①—⑤—∞
$\widetilde{F}_{1,2}$: ⑥—①—∞　⑤—②—⑦　⓪—④—③

同様にして, F_3, F_4 から RMP$_3$D(9,1,1) の3つの P_3 因子 $\widetilde{F}_3, \widetilde{F}_4, \widetilde{F}_{3,4}$ が得られる。

$\widetilde{F}_3$: ③—①—⓪　④—⑤—⑦　②—∞—⑥
$\widetilde{F}_4$: ④—②—①　⑤—⓪—⑥　③—⑦—∞
$\widetilde{F}_{3,4}$: ⓪—③—∞　⑦—④—①　②—⑥—⑤

$\mathcal{F} = \widetilde{F}_1 \oplus \widetilde{F}_2 \oplus \widetilde{F}_{1,2} \oplus \widetilde{F}_3 \oplus \widetilde{F}_4 \oplus \widetilde{F}_{3,4}$: RMP$_3$D(9,1,1)

Example 4　RBIBD(15, 3, 1)

A solution of RBIBD(15,3,1) is

[(∞,5,10),(1,6,11),(2,7,12),(3,8,13),(4,9,14)]

CT (1,2,3,5,6,11,9) (4,8,14,10,13,12,7)

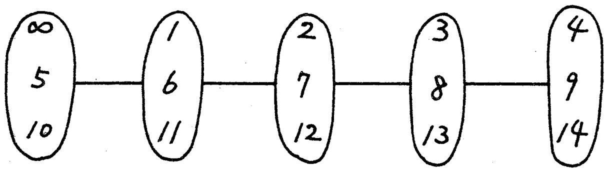
where CT means a cyclic transformation.

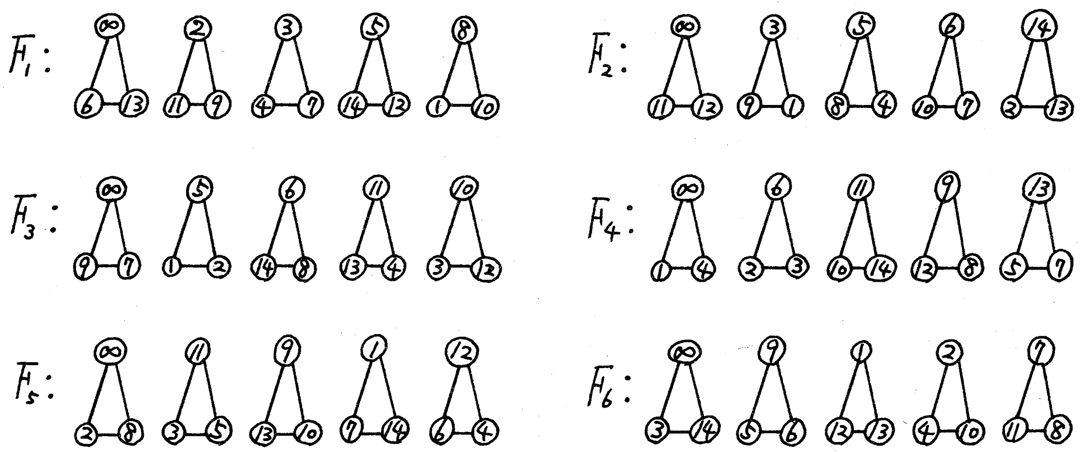
これは "The Problem of 15 School-Girls" の1つの解答である。

Lemma 3　RMP$_3$D(5, 3, 1) が存在する。

(証明) Example 4 より, RBIBD(15,3,1) の7個の K_3 因子 F_0, $F_1, \cdots, F_6$ が得られる。F_0 の中の5組の点集合 {∞,5,10}, {1,6,11},

$\{2,7,12\}, \{3,8,13\}, \{4,9,14\}$ を K_5^3 の Partite Sets と見なす。

$K_5^3 =$ 



F_1 と F_2, F_3 と F_4, F_5 と F_6 の3組のペアから，$RMP_3D(5,3,1)$ の9個の P_3 因子 $\widetilde{F_1}, \widetilde{F_2}, \widetilde{F_{1,2}}, \widetilde{F_3}, \widetilde{F_4}, \widetilde{F_{3,4}}, \widetilde{F_5}, \widetilde{F_6}, \widetilde{F_{5,6}}$ が得られる。$\mathcal{F} = \widetilde{F_1} \oplus \widetilde{F_2} \oplus \widetilde{F_{1,2}} \oplus \widetilde{F_3} \oplus \widetilde{F_4} \oplus \widetilde{F_{3,4}} \oplus \widetilde{F_5} \oplus \widetilde{F_6} \oplus \widetilde{F_{5,6}} : RMP_3D(5,3,1)$

2.3 RMP_3D の拡張定理

n および λ に関する拡張定理が得られる。

Theorem 3　$RMP_3D(m,n,\lambda)$ が存在する

$\Longrightarrow RMP_3D(m,\alpha n,\lambda)$ が存在する（α は正の整数）

（証明）$RMP_3D(m,n,\lambda)$ から λK_m^n の P_3 因子分解が得られる。λK_m^n の1点を α 点に拡大し，点と点を結ぶ線をこの α 点と α 点を結ぶ α^2 本の線に拡大すれば，$P_3 = K_{1,2}$ であるから，この拡大によって $\lambda K_m^{\alpha n}$ の $K_{\alpha,2\alpha}$ 因子分解が得られる。$K_{\alpha,2\alpha}$ の P_3 因子分解を用いれば，$\lambda K_m^{\alpha n}$ の P_3 因子分解が得られる。

<u>Theorem 4</u>　$RMP_3D(m,n,\lambda)$ が存在する

$\Longrightarrow RMP_3D(m,n,\beta\lambda)$ が存在する（β は正の整数）

（証明）$RMP_3D(m,n,\lambda)$ を β 個並べれば $RMP_3D(m,n,\beta\lambda)$ が得られる。

<u>2.4 RMP_3D の十分条件</u>

(I) をみたす m,n,λ を分類する。

<u>Lemma 4</u>　$mn\equiv 0 \pmod 3$, $(m-1)n\equiv 0 \pmod 4$, λ: 任意

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (1) & m\equiv 9 \pmod{12},\quad n,\lambda: \text{任意} \\ (2) & m\equiv 3 \pmod 6,\quad n\equiv 0 \pmod 2,\quad \lambda: \text{任意} \\ (3) & m\equiv 1 \pmod 4,\quad n\equiv 0 \pmod 3,\quad \lambda: \text{任意} \\ (4) & m\equiv 0 \pmod 3,\quad n\equiv 0 \pmod 4,\quad \lambda: \text{任意} \\ (5) & m\equiv 1 \pmod 2,\quad n\equiv 0 \pmod 6,\quad \lambda: \text{任意} \\ (6) & n\equiv 0 \pmod{12},\quad m,\lambda: \text{任意} \end{cases}$$

(1)〜(6) をみたす小さな n,λ に対して次の Lemma が得られる。

<u>Lemma 5</u>　$RMP_3D(12m_0+9,1,1)$ が存在する。

（証明）$m=12m_0+9$ とおく。$m\equiv 3 \pmod 6$ であるから，Theorem 2 より $RBIBD(m,3,1)$ が存在する。$RBIBD(m,3,1)$ の $(6m_0+4)$ 個の K_3 因子を2個ずつのペアに分割すれば，各ペアから $RMP_3D(m,1,1)$ の P_3 因子を3個ずつ構成することができ，全部で $r=9m_0+6$ 個の P_3 因子が得られる。

<u>Lemma 6</u>　$RMP_3D(6m_0+3,2,1)$ が存在する。

（証明） $m=6m_0+3$ とおく。$m\equiv 3 \pmod 6$ であるから，K_m の K_3 因子分解が得られる。拡大して，K_m^2 の K_3^2 因子分解が得られる。K_3^2 の P_3 因子分解を用いれば，K_m^2 の P_3 因子分解が得られる。

Lemma 7　$RMP_3D(4m_0+1, 3, 1)$ が存在する。

（証明） $m=4m_0+1$ とおく。$3m\equiv 3 \pmod 6$ であるから，$RBIBD(3m, 3, 1)$ が存在して，$(6m_0+1)$ 個の K_3 因子 $F_0, F_1, \cdots, F_{6m_0}$ が得られる。F_0 の中の，それぞれ3個ずつの点からなる，m 組の点集合を K_m^3 の Partite Sets と見なす。この $F_1, \cdots, F_{6m_0}$ を2個ずつのペアに分割して，$RMP_3D(m, 3, 1)$ の全部で $r=9m_0$ 個の P_3 因子を構成することができる。

Lemma 8　$RMP_3D(2m_0+1, 6, 1)$ が存在する。

（証明） $m=2m_0+1$ とおく。$3m\equiv 3 \pmod 6$ であるから，$RBIBD(3m, 3, 1)$ が存在して，K_{3m} の K_3 因子分解が得られる。拡大して，K_{3m}^2 の K_3^2 因子分解が得られる。この $(3m_0+1)$ 個の K_3^2 因子を $F_0, F_1, \cdots, F_{3m_0}$ とする。F_0 の中の，それぞれ6個ずつの点からなる，m 組の点集合を K_m^6 の Partite Sets と見なせば，$F_1, F_2, \cdots, F_{3m_0}$ は K_m^6 の K_3^2 因子分解になっている。K_3^2 の P_3 因子分解を用いれば，K_m^6 の P_3 因子分解が得られる。

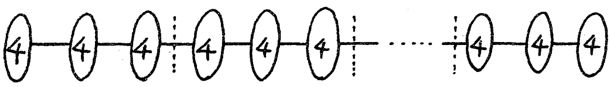
Lemma 9　$RMP_3D(m, 12, 1)$ が存在する。

（証明） m が奇数の場合には，Lemma 8より $RMP_3D(m, 6, 1)$

が存在する。nに関する拡張定理より$RMP_3D(m,12,1)$が存在する。mが偶数の場合には，K_mは1因子分解可能である。即ち，K_mのK_2因子分解が得られる。拡大して，K_m^{12}のK_2^{12}因子分解が得られる。K_2^{12}のP_3因子分解を用いれば，K_m^{12}のP_3因子分解が得られる。

Lemma 10　$RMP_3D(3m_0,4,1)$が存在する。

（証明）$m=3m_0$とおく。

$K_m^4 =$ 

$$= (K_3^4 \cup K_3^4 \cup \cdots \cup K_3^4) \oplus K_{m_0}^{12}$$

K_3^4のP_3因子分解を用いれば，$K_3^4 \cup K_3^4 \cup \cdots \cup K_3^4$の$P_3$因子分解が得られる。また，Lemma 9より$K_{m_0}^{12}$の$P_3$因子分解が得られる。両者を合わせれば，$K_m^4$の$P_3$因子分解が得られる。

Lemma 5～Lemma 10 にnとλの拡張定理を適用すれば，(1)～(6)をみたすすべてのm,n,λに対して，従って，(I)をみたすすべてのm,n,λに対して，$RMP_3D(m,n,\lambda)$が存在する。そこで，次の定理が得られる。

Theorem 5　(I) $\Longrightarrow$ $RMP_3D(m,n,\lambda)$が存在する。

(II)をみたすm,n,λを分類する。

Lemma 11　$mn \equiv 0 \pmod 3$, $(m-1)n \equiv 2 \pmod 4$, $\lambda \equiv 0 \pmod 2$

(1)′　$m \equiv 3 \pmod{12}$, $n \equiv 1 \pmod 2$, $\lambda \equiv 0 \pmod 2$

(2)′　$m \equiv 7 \pmod{12}$, $n \equiv 3, 9 \pmod{12}$, $\lambda \equiv 0 \pmod 2$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (3)' & m \equiv 11 \pmod{12},\ n \equiv 3, 9 \pmod{12},\ \lambda \equiv 0 \pmod 2 \\ (4)' & m \equiv 0 \pmod 6,\ n \equiv 2, 6, 10 \pmod{12},\ \lambda \equiv 0 \pmod 2 \\ (5)' & m \equiv 2, 4 \pmod 6,\ n \equiv 6 \pmod{12},\ \lambda \equiv 0 \pmod 2 \end{cases}$$

(1)′～(5)′をみたす小さなn,λに対して，次の Lemma が得られる。

Lemma 12　RMP_3D$(12m_0+3, 1, 2)$ が存在する。

（証明）$m=12m_0+3$ とおく。$m \equiv 3 \pmod 6$ であるから，RBIBD$(m, 3, 1)$ が存在して，$(6m_0+1)$ 個の K_3因子 $F_1, F_2, \cdots, F_{6m_0+1}$ が得られる。このK_mのK_3因子を２回ずつ用いて，F_1とF_2，…，F_{6m_0-1}とF_{6m_0}，F_{6m_0+1}とF_1，F_2とF_3，…，F_{6m_0}とF_{6m_0+1}の２個ずつのペアから RMP_3D$(m, 1, 2)$ の全部で $3(6m_0+1)$ 個のP_3因子を構成することができる。

Lemma 13　RMP_3D$(12m_0+7, 3, 2)$ が存在する。

（証明）$m=12m_0+7$ とおく。$3m \equiv 3 \pmod 6$ であるから，RBIBD$(3m, 3, 1)$ が存在して，K_{3m} の $(18m_0+10)$ 個の K_3因子 $F_0, F_1, \cdots, F_{18m_0+9}$ が得られる。F_0の中の，それぞれ３個ずつの点からなるm組の点集合をK_m^3の Partite Sets と見なし，$F_1, \cdots, F_{18m_0+9}$ を２回ずつ用いて，F_1とF_2，…，F_{18m_0+9}とF_1，…，F_{18m_0+8}とF_{18m_0+9}の２個ずつのペアから RMP_3D$(m, 3, 2)$ の全部で $3(18m_0+9)$ 個のP_3因子を構成することができる。

Lemma 14　RMP_3D$(12m_0+11, 3, 2)$ が存在する。

（証明）$m=12m_0+11$ とおく。$3m \equiv 3 \pmod 6$ であるから，

RBIBD$(3m,3,1)$が存在して，K_{3m}の$(18m_0+16)$個のK_3因子$F_0, F_1, \cdots, F_{18m_0+15}$が得られる。$F_0$の中の，それぞれ3個ずつの点からなる$m$組の点集合を$K_m^3$の Partite Sets と見なし，$F_1, \cdots, F_{18m_0+15}$を2回ずつ用いて，$F_1$と$F_2$，…，$F_{18m_0+15}$と$F_1$，…，$F_{18m_0+14}$と$F_{18m_0+15}$の2個ずつのペアからRMP$_3D(m,3,2)$の全部で$3(18m_0+15)$個の$P_3$因子を構成することができる。

Lemma 15　RMP$_3$D$(2m_0,6,2)$が存在する。

（証明）$m=2m_0$とおく。mは偶数であるから，K_mは1因子分解可能であり，K_mのK_2因子分解が得られる。拡大して，$2K_m^6$の$2K_2^6$因子分解が得られる。$2K_2^6$のP_3因子分解を用いれば，$2K_m^6$のP_3因子分解が得られる。

Lemma 16　RMP$_3$D$(6m_0,2,2)$が存在する。

（証明）$m=6m_0$とおく。

$$K_m = (K_3 \cup K_3 \cup \cdots \cup K_3) \oplus K_{2m_0}^3$$

$$2K_m^2 = (2K_3^2 \cup 2K_3^2 \cup \cdots \cup 2K_3^2) \oplus 2K_{2m_0}^6$$

$2K_3^2$のP_3因子分解を用いれば，$2K_3^2 \cup 2K_3^2 \cup \cdots \cup 2K_3^2$の$P_3$因子分解が得られる。また，Lemma 15 より$2K_{2m_0}^6$の$P_3$因子分解が得られる。両者を合わせれば，$2K_m^2$の$P_3$因子分解が得られる。

Lemma 12～Lemma 16にnとλの拡張定理を適用すれば，(1)～(5)をみたすすべてのm, n, λに対して，従って，(II)をみたすすべてのm, n, λに対して，RMP$_3$D(m,n,λ)が存在する。そ

こで，次の定理が得られる。

<u>Theorem 6</u>　(Ⅲ) $\Longrightarrow$ RMP$_3$D(m,n,λ) が存在する。

(Ⅲ)をみたす m,n,λ を分類する。

<u>Lemma 17</u>　$mn\equiv 0 \pmod 3$, $(m-1)n\equiv 1,3 \pmod 4$, $\lambda\equiv 0 \pmod 4$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (1)'' & m\equiv 0 \pmod 6,\ n\equiv 1 \pmod 2,\ \lambda\equiv 0 \pmod 4 \\ (2)'' & m\equiv 2,4 \pmod 6,\ n\equiv 3,9 \pmod{12},\ \lambda\equiv 0 \pmod 4 \end{cases}$$

$(1)''$, $(2)''$ をみたす小さな n,λ に対して，次の Lemma が得られる。

<u>Lemma 18</u>　RMP$_3$D$(2m_0, 3, 4)$ が存在する。

（証明）$m=2m_0$ とおく。m は偶数であるから，K_m は１因子分解可能であり，K_m の K_2 因子分解が得られる。拡大して，$4K_m^3$ の $4K_2^3$ 因子分解が得られる。$4K_2^3$ の P_3 因子分解を用いれば，$4K_m^3$ の P_3 因子分解が得られる。

<u>Lemma 19</u>　RMP$_3$D$(6m_0, 1, 4)$ が存在する。

（証明）$m=6m_0$ とおく。

$$K_m = (K_3 \cup K_3 \cup \cdots \cup K_3) \oplus K_{2m_0}^3$$

$$4K_m = (4K_3 \cup 4K_3 \cup \cdots \cup 4K_3) \oplus 4K_{2m_0}^3$$

$4K_3$ の P_3 因子分解を用いれば，$4K_3\cup 4K_3 \cup\cdots\cup 4K_3$ の P_3 因子分解が得られる。また，Lemma 18 より $4K_{2m_0}^3$ の P_3 因子分解が得られる。両者を合わせれば，$4K_m$ の P_3 因子分解が得られる。

Lemma 18，Lemma 19 に n と λ の拡張定理を適用すれば，$(1)''$, $(2)''$ をみたすすべての m,n,λ に対して，従って，(Ⅲ)をみたす

すべてのm,n,λに対して，$RMP_3D(m,n,\lambda)$が存在する。そこで，次の定理が得られる。

<u>Theorem 7</u>　(III) $\Longrightarrow$ $RMP_3D(m,n,\lambda)$が存在する。

Theorem 5～Theorem 7 と Lemma 1 から，$RMP_3D(m,n,\lambda)$が存在するための十分条件が次の定理にまとめられる。

<u>Theorem 8</u>　$mn \equiv 0 \pmod 3$，$\lambda(m-1)n \equiv 0 \pmod 4$

$\Longrightarrow$ $RMP_3D(m,n,\lambda)$が存在する。

2.5　RMP₃D定理

$RMP_3D(m,n,\lambda)$が存在するための明らかな必要条件(i),(ii)は，また十分条件でもあることが分った。そこで，次のRMP₃D定理が得られる。

<u>THEOREM</u>　$RMP_3D(m,n,\lambda)$が存在する

$\Longleftrightarrow$ (i) $mn \equiv 0 \pmod 3$，(ii) $\lambda(m-1)n \equiv 0 \pmod 4$.

参考文献

[1] P.Hell and A.Rosa,Graph decompositions,handcuffed prisoners and balanced P-designs,Discrete Math. 2 (1972),229-252.

[2] C.Huang,Resolvable balanced bipartite designs,Discrete Math. 14 (1976), 319-335.

[3] D.K.Ray-Chaudhuri and R.M.Wilson,Solution of Kirkman's problem,Combinatorics (Proc. Sympos. Pure Math.,Vol. XIX,Univ. California,Los Angeles,Calif., 1968),187-203.

[4] 潮和彦，完全2組グラフのP_3因子分解，数理研講究録534 (1984), 15-27.

[5] 潮和彦，Resolvable Multipartite P_3 Designについて，日本数学会・昭和60年度年会，応用数学分科会予稿集，9-12.